Profesor:
Fortunato Mendoza

PITAGORAS
ACADEMIA

ARITMÉTICA

GRUPO PITÁGORAS

ARITMÉTICA

RADICACIÓN

RADICACIÓN

Es la operación inversa a la potenciación, en el cual dados dos números llamados índice y radicando, consiste en calcular en tercer número llamado raíz que elevado a un exponente igual al índice, resulte el radicando.

En general:

$$\sqrt[n]{N} = k$$

Donde: N: Radicando

n: Indice

K: Raiz enésima

RADICACIÓN ENTERA

Al extraer la raíz de un número entero el resultado no siempre es entero, por tal motivo se recurre a un término adicional llamado residuo, de modo así que todos los términos sean enteros.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[n]{N} & k \\ \hline r & \end{array} \quad \Rightarrow \quad N = k^n + r$$

r : Residuo

RAÍZ CUADRADA ENTERA

Se denomina así a la raíz, cuando el índice es 2.

Puede ser:

a) Exacta (r = 0)

Resulta cuando el residuo es cero, y para ello el radicando debe ser un cuadrado perfecto

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{144} & 12 \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow 144 = 12^2$$

En general:

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow N = k^2}$$

b) Inexacta (r ≠ 0)

Resulta cuando el residuo es diferente de cero; se puede extraer la raíz de dos maneras: por defecto o por exceso.

- **Por defecto**

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{70} & 8 \\ \hline 6 & \end{array} \rightarrow 70 = 8^2 + 6$$

En general:

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r & \end{array} \rightarrow N = k^2 + r}$$

Donde:

k : Raíz cuadrada por defecto

r : Residuo por defecto

- **Por exceso**

Ejemplo: $\sqrt{70}$ | 9 → $70 = 9^2 - 11$

11

En general: $\sqrt{N}$ | k + 1 → $N = (k+1)^2 - r_e$

r_e

Donde:

k + 1 : Raíz cuadrada por exceso

r_e : Residuo por exceso

Propiedades:

1. $r + r_e = 2k + 1$
2. $r_{max} = 2k$

$\sqrt{N}$ | 40

r_{max}

→ $r_{max} = 2(40)$

$r_{max} = 80$

RAÍZ CÚBICA ENTERA

Se denomina así a la raíz, cuando el índice es 3.

$\sqrt[3]{N}$ | k → raíz cúbica

r $r \geq 0$

Puede ser:

a) Exacta (r = 0)

Resulta cuando el residuo es cero y para ello el radicando debe ser un cubo perfecto.

Ejemplo: $\sqrt[3]{64}$ | 4 → $64 = 4^3$

0

En general: $\sqrt[3]{N}$ | k → $N = k^3$

0

b) Inexacta ($r \neq 0$)

Resulta cuando el residuo es diferente de cero. Se puede extraer la raíz de dos maneras: por defecto o por exceso.

- **Por defecto**

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{80} & 4 \\ \hline 16 & \end{array} \rightarrow 80 = 4^3 + 16$$

En general:

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \hline r & \end{array} \rightarrow N = k^3 + r}$$

Donde:

k : Raíz cúbica por defecto

r : Residuo por defecto

- **Por exceso**

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{80} & 5 \\ \hline 45 & \end{array} \rightarrow 80 = 5^3 - 45$$

En general:

$$\boxed{\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & k+1 \\ \hline r_e & \end{array} \rightarrow N = (k+1)^3 - r_e}$$

Donde:

k +1: Raíz cúbica por exceso

r_e : Residuo por exceso

Propiedades:

1. $\boxed{r + r_e = 3k(k+1) + 1}$

2. $\boxed{r_{max} = 3k(k+1)}$ $\rightarrow r_{max} = 3(10)(11) = 330$

Ejemplo

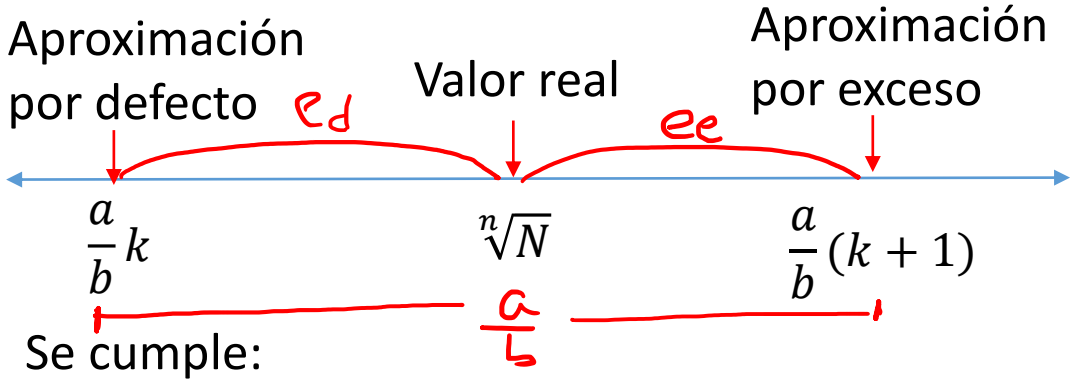
$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & 10 \\ \hline r_{max} & \end{array}$$

APROXIMACIONES

Caso I

Calcular la $\sqrt[n]{N}$ por defecto con una aproximación en menos de $\frac{a}{b}$

Resolución:



Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b}k \leq \sqrt[n]{N} < \frac{a}{b}(k+1)}$$

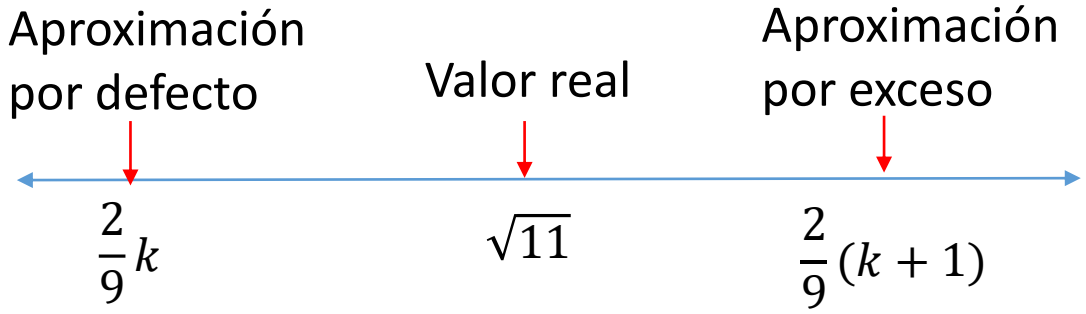
Donde: k∈ $\mathbb{Z}^+$

Respuesta: $\frac{a}{b}k$

Ejemplo:

Calcular la raíz cuadrada por defecto de 11 con una aproximación en menos de $\frac{2}{9}$

Resolución



Se cumple: $$\frac{2}{9}k \leq \sqrt{11} < \frac{2}{9}(k+1)$$

$$13{,}92 < k \leq 14{,}92$$

$\sqrt{11} = 3{,}316$

$\frac{2}{9} = 0{,}222$

K= 14

Rpta: $\frac{2}{9}x14 = \frac{28}{9} = 3{,}111 \rightarrow e = 0{,}204$

Caso II

Sea A un número racional que aproxima a $\sqrt[n]{N}$ con un error menor que ε

Se cumple:

$$\boxed{\left|\sqrt[n]{N} - A\right| < \varepsilon}$$

~~Donde: k∈ ℤ⁺~~

Aplicación:

¿Cuántos números naturales N cumplen que $\frac{22}{5}$, aproximan a $\sqrt{N}$ con un error menor que $\frac{4}{11}$

Resolución

Se cumple: $\left|\sqrt{N} - \frac{22}{5}\right| < \frac{4}{11}$

$$\frac{22}{5} - \frac{4}{11} < \sqrt{N} < \frac{22}{5} + \frac{4}{11}$$

$$16{,}29 < N < 22{,}69$$

N= 17; 18; 19; 20; 21; 22 → 6 valores

Rpta: 6

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

01 Determinar el residuo de la raíz cuadrada de $\overline{7ab5}$ sabiendo que es máximo y $a \neq b \neq 0$.

A) 130 B) 140 C) 150
D) 160 E) 170

Resolución:

$\sqrt{\overline{7ab5}} \,\big|\, k \rightarrow \overline{7ab6} = (k+1)^2$

$2k$

Obs $k+1 = 8$. 4 o 6

Si $k+1 = 84 \rightarrow 84^2 = 7056$ (no es sol)

Si $k+1 = 86 \rightarrow 86^2 = 7396$

Piden $2k = 2(85) = 170$

02 Si $\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)}$ tiene una cantidad impar de divisores, calcular el residuo por exceso al extraer la raíz cuadrada de $\overline{a(2a)(3a)}$.

A) 22 B) 25 C) 31
D) 32 E) 35

Resolución:

$\overline{a(a+1)(a+2)(3a)(a+3)} = k^2$

$a=1 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 = 4+2$ ✗

$a=2 \rightarrow 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 5$ ✗

$a=3 \rightarrow 3 \quad 4 \quad 5 \quad 9 \quad 6 = 186^2$ ✓

Luego $\overline{a(2a)(3a)} = 369$

Por exceso

$\sqrt{369} \,\big|\, 20$

31

RPTA: 31

03. Al extraer la raíz cúbica de un número de tres cifras se obtuvo 37 de residuo. Al extraer la raíz cúbica del numeral anterior con las cifras en orden inverso se obtiene la raíz anterior aumentada en 1 y 45 de residuo. Determinar la suma de cifras del numeral.

A) 18 B) 27 C) 15
D) 9 E) 12

Resolución:

Sea el # $\overline{abc}$

$\sqrt[3]{\overline{abc}}$ | k ; $\sqrt[3]{\overline{cba}}$ | $k+1$
37 | 45

Se cumple

$\overline{abc} = k^3 + 37$
$\overline{cba} = (k+1)^3 + 45$ (−)

$99(c-a) = 3k(k+1) + 9 \rightarrow 33(\underbrace{c-a}_{1}) = k(k+1) + 3$

$30 = k(k+1) \rightarrow k = 5$
5 → 6

Luego $\overline{abc} = 5^3 + 37 = 162$
$\therefore a+b+c = 9$

04. Determinar un número entero sabiendo que al extraerle la raíz cuadrada se obtiene 5 de resido y si se adiciona 142 se convierte en un cuadrado perfecto. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 8 B) 18 C) 21
D) 15 E) 3

Resolución:

Sea el # N

$\sqrt{N}$ | k
5

$\rightarrow N = k^2 + 5$ ... (1)

$N + 142 = Q^2$ ... (2)

(1) en (2) : $k^2 + 5 + 142 = Q^2 \rightarrow 147 = Q^2 - k^2$

$147 = (Q+k)(Q-k)$

$147 \times 1 \rightarrow k = 73 \rightarrow N = 5334$
$49 \times 3 \rightarrow k = 23 \rightarrow N = 534$
$21 \times 7 \rightarrow k = 7 \rightarrow N = 54$

147 | 7
21 | 3
7 | 7
1

RPTA: 15

05. Si a un número entero se le suma 525, su raíz aumenta en 3 unidades y el residuo se hace máximo. Si el residuo original fue "n", ¿cuántos números cumplen dicha condición? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

A) 85 B) 35 C) 22
D) 84 E) 37

Resolución:

Sea N uno de los #,

$\sqrt{N}\,\underline{|\,k}$, r → $\sqrt{N+525}\,\underline{|\,k+3}$, r_{max}

Se cumple

$N = k^2 + r$

$N + 526 = (k+4)^2$ (−)

$526 = 8k + 16 - r \rightarrow r = 8k - 510$

$1 \leq 8k - 516 \leq 2k \rightarrow 64{,}6 \leq k \leq 86$

$k = 65; 66; 67; \ldots; 86 \rightarrow 22$ valores

RPTA: 22

06. Al extraerse la raíz cuadrada de un número se tomó por error al residuo como raíz y a ésta como residuo, resultando un número que es inferior en 372 unidades al original. Si la diferencia de la raíz menos el residuo es 3, calcular el número original.

A) 4 157 B) 4 324 C) 5 624
D) 4 013 E) 7 254

Resolución:

CORRECTO: Sea el # N; $\sqrt{N}\,\underline{|\,k}$, r

POR ERROR: $\sqrt{N'}\,\underline{|\,r}$, k

* $N - N' = 372$
* $k - r = 3$

Se cumple $N = k^2 + r$ ... (1)

$N' = r^2 + k$ (−)

$372 = k^2 - r^2 + r - k$

$372 = (k+r)\underbrace{(k-r)}_{3} - \underbrace{(k-r)}_{3}$

$k + r = 125 \rightarrow k = 64;\ r = 61$

En (1) $N = 64^2 + 61 = 4157$

07. Calcular cuántos números cumplen que al extraerles, su raíz cuadrada, se obtiene residuos máximos, de modo que éstos son menores o iguales al menor número que tiene 24 divisores.

A) 180 B) 240 C) 420
D) 210 E) 320

Resolución:

min

Si CD (#) = 24 = 4×3×2

$\# = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \rightarrow 24$ div

$\# = 360$

Sea el # N : $\sqrt{N}$ | k, $2k$ $\rightarrow N = k^2 + 2k$

Dato $2k \leq 360 \rightarrow k \leq 180$

Luego $k = \underbrace{1; 2; 3; ---; 180}_{180 \text{ valores}}$

RPTA: 180

08. La raíz cuadrada del número $\overline{88xyz0}$ es exacta. Determinar el valor de:

(x + y + z)

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:

$\overline{88xyz0} = k^2 \rightarrow z = 0 \wedge \overline{88xy} = a^2$

Se cumple

$\sqrt{88xy}$ | 94
81
7xy
736
0

184 × 4 ⇒ y = 6
x = 3

∴ x + y + z = 9

09. ¿Cuántos números existen cuya raíz cuadrada es 52 y cuya raíz cúbica es 13?

A) 42 B) 39 C) 40
D) 41 E) 1

Resolución:

Sea N uno de los #s

$\sqrt{N}\,\underline{|52}$; $\sqrt[3]{N}\,\underline{|13}$

Se cumple

$52 \leq \sqrt{N} < 53 \rightarrow 2704 \leq N < 2809$

$13 \leq \sqrt[3]{N} < 14 \rightarrow 2197 \leq N < 2744$

Intersectando

$2704 \leq N < 2744$

$N = 2704; 2705; \ldots; 2743 \rightarrow 40$ val

RPTA: 40

10. Al extraer una raíz cúbica se obtiene 12 de raíz y un cierto residuo. Si al radicando se le suma 18 unidades el residuo se hace máximo. Calcular el residuo original

A) 200 B) 450 C) 320
D) 540 E) 600

Resolución:

Sea el # N : $\sqrt[3]{N}\,\underline{|12} \rightarrow \sqrt[3]{N+18}\,\underline{|k}$

Se cumple

$N = 12^3 + r$

$N + 19 = (k+1)^3 \rightarrow 12^3 + r + 19 = (k+1)^3$

$1747 + r = (k+1)^3$

Obs $r \leq 3(12)(13)$

$r \leq 468$

Para $k = 12 \rightarrow r = 450$ ✓

Para $k = 13 \rightarrow r = 997$ ✗

RPTA: 450

01. Al extraer la raíz cuadrada de un número se observó que los residuos por defecto y por exceso están en la relación de 2 a 5 Hallar el menor valor del radicando, si a dividir éste entre 7 se obtiene residuo máximo. Dar como respuesta la suma de la cifras.

A) 18 B) 20 C) 22
D) 25 E) 30

Resolución:

Sea el $\#N^{\min}$; $\sqrt{N}$ | k, r

$r = 2n$

$r_e = 5n$

$N = \overset{\circ}{7} + 6$

$N = k^2 + r$ --- (1)

Propiedad: $\underbrace{r + r_e}_{7n} = 2k+1$

$7n = 2k+1 \rightarrow n = \text{impar}$

$\overset{\circ}{7} = 2k+1 \rightarrow 2k = \overset{\circ}{7} + 6 \rightarrow k = \overset{\circ}{7} + 3$

En (1) $\overset{\circ}{7} + 6 = (\overset{\circ}{7} + 3)^2 + 2n$

$\overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} + 2 + 2n \rightarrow 2n = \overset{\circ}{7} + 4$

$n = \overset{\circ}{7} + 2$

Para $\dot{7} = 7 \rightarrow n = 9$; $k = 31$; $r = 18$

Luego $N = 31^2 + 18$

$N = 979 \rightarrow \Sigma cfs = 25$

PROBLEMAS

12. Si cada asterisco representa una cifra:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1\,*\,*\,*\,*\,*} & *\,*\,* \\
\underline{*\,*} & \\
\,\,* & \\
\underline{1\,*\,*} & \\
\,\,*\,* & \\
\underline{5\,*\,*\,9} & \\
1\,2 &
\end{array}
$$

¿cuál es la suma de cifras del radicando?

A) 22 B) 21 C) 20

D) 19 E) 18

Resolución:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1\,8\,2\,3\,4\,1} & 4\,2\,7 \\
\underline{1\,6} & \\
2\,2\,3 & 82 \times 2 \\
\underline{1\,6\,4} & \\
5\,9\,4\,1 & 847 \times 7 \\
\underline{5\,9\,2\,9} & \\
1\,2 &
\end{array}
$$

Piden

$\sum cifras$ (radicando) $= 19$

PROBLEMAS

13. Calcular la suma de los cuadrados perfectos de cuatro cifras cuya raíz esté formada por su primera y última cifra, en ese orden.

A) 18 241 B) 16 231 C) 1 907
D) 18 652 E) 19 781

Resolución:

14. Calcular un numeral de cuatro cifras sabiendo que tanto el residuo de su raíz cuadrada como el de su raíz cúbica son mínimos. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

Resolución:

PROBLEMAS

15. ¿Cuántos números cuadrados perfecto son $\overset{\circ}{7} + 2$ y tales que su raíz cuadrada es representada con tres cifras?

A) 128 B) 258 C) 256
D) 300 E) 240

Resolución:

16. En una radicación cuadrada inexacta, el residuo pue tomar 648 valores diferentes sin que se altere la ra cuadrada entera. La suma de cifras de la raíz cuadra entera es:

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:

17. Calcular $\sqrt{11}$ por defecto con un error menor que 1/7

A) 22/7 B) 43/14 C) 45/14
D) 23/7 E) 24/7

Resolución:

Por defecto Por exceso

$\frac{1}{7}k \quad \sqrt{11} \quad \frac{1}{7}(k+1)$

Se cumple

$$\frac{1}{7}k \leq \sqrt{11} < \frac{1}{7}(k+1)$$

$$22{,}2 < k \leq 23{,}2 \rightarrow k = 23$$

Piden $\frac{1}{7}k = \frac{1}{7}(23) = \frac{23}{7}$

18. ¿Cuántos de los siguientes números 4/7; 8/7; 9/7; 10/7; 13/7 aproxima a $\sqrt[3]{\frac{22}{7}}$ en menos de 3/7?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

19. Al extraer la raíz cuadrada por defecto de $\overline{abc}$ con una aproximación de 2/9 se obtuvo $15\frac{7}{9}$. ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{abc}$?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:

Por defecto — Por exceso

$\frac{2}{9}k \quad \sqrt{\overline{abc}} \quad \frac{2}{9}(k+1)$

Dato $\frac{2}{9}k = 15\frac{7}{9} \rightarrow \frac{2}{9}k = \frac{142}{9} \rightarrow k = 71$

Se cumple

$\frac{2}{9}(71) \leq \sqrt{\overline{abc}} < \frac{2}{9}(72)$

$248,9 \leq \overline{abc} < 256$

$\overline{abc} = 249; 250; \ldots; 255 \rightarrow 7$ valores

RPTA: 7

20. ¿Cuántos números naturales N cumplen que el número 7 aproxima a $\sqrt[3]{N}$ con un error menor que $\frac{1}{2}$?

A) 145 B) 146 C) 147
D) 148 E) 149

Resolución:

$\left|\sqrt[3]{N} - 7\right| < \frac{1}{2}$

Se cumple

$7 - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{N} < 7 + \frac{1}{2}$

$6,5 < \sqrt[3]{N} < 7,5$

$274,625 < N < 421,875$

$N = 275; 276; \ldots; 421 \rightarrow 147$ valores

RPTA: 147

PROBLEMAS

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS